Introducción a los espacios de probabilidad no conmutativos

Natalia Agudelo Zapata *

14 diciembre 2023

Resumen

Este trabajo ha sido desarrollado en la segunda versión del Programa Virtual de Lectura Dirigida *Pares Ordenados*, bajo la supervisión del estudiante de maestría Violeta Martínez Escamilla del CIMAT, Guanajuato. El objetivo del proyecto fue estudiar conceptos fundamentales de la probabilidad en espacios de probabilidad no conmutativos, más conocida como probabilidad libre. Esta rama de las matemáticas fue presentada por primera vez en los a los 80 por Dan Voiculescu, con la idea de resolver el problema del isomorfismo de los factores de grupos libres. En el documento se presentan, primero, algunas nociones importantes del análisis funcional como son las C*-álgebras, para luego introducir los *-espacios de probabilidad, C*-espacios de probabilidad, las cuatro definiciones de independencia y el teorema del límite central.

1 C*-álgebras

Definición 1.1. Un *álgebra* es un espacio vectorial A, dotado de una operación binaria, llamada multiplicaión

$$\begin{aligned} A \times A &\to A \\ (x, y) &\to xy, \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $(xy)z = x(yz)$, para todos x, y, $z \in A$ (*Asociatividad*).

2. $x(y+z) = xy + xz$ y $(x+y)z = xz + yz$, para todos x, y, $z \in A$ (*Distributividad con la suma*).

3. $c(xy) = (cx)y = x(cy)$, para todo $c \in \mathbb{C}$ y x, $y \in A$.

*agudelo.natalia@correounivalle.edu.co

Si existe $e \in A$ tal que $ex = xe = x$, para todo $x \in A$, se dice que A es *unital*, y e es llamado la *identidad* o *unidad* de A. Por otro lado, decimos que A es *abeliano* o *conmutativo* si $xy = yx$, para todos x, $y \in A$.

Definición 1.2. Un *álgebra de Banach* A, es un álgebra dotada de una norma con la cual A es un espacio de Banach, que satisface que

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in A.$$

Ejemplos 1.1.

(1) Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sea $C_b(X)$ el conjunto de funciones continuas y acotadas $f : X \to \mathbb{C}$. $C_b(X)$ es un álgebra de Banach con la norma $\|\cdot\|$ y el producto dados por

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|,$$
$$(fg)(x) := f(x)g(x).$$

Observe primero que el hecho que $C_b(X)$ sea un espacio de Banach con la norma del supremo, sigue directamente de que $\mathbb{C}$ sea un espacio completo. Además, es claro por los axiomas de cuerpo en $\mathbb{C}$ que la operación multiplicación definida antes, satisface las condiciones 1, 2 y 3 de la definición 1.1. Además,

$$\begin{aligned}\|fg\| = \sup_{x \in X} |(fg)(x)| &= \sup_{x \in X} |f(x)||g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x)| \sup_{x \in X} |g(x)| \\ &= \|f\|\|g\|.\end{aligned}$$

(2) Sea H un espacio de Hilbert. Entonces $B(H)$ es un álgebra de Banach con la operación multiplicación dada por la composición y norma definida por la norma operador. En efecto, al ser H es un espacio de Hilbert, $B(H)$ es un espacio de Banach bajo la métrica inducida por la norma operador. Por otro lado, con la composición de funciones $B(H)$ es un álgebra y se satisface para todo $x \in X$, S, $T \in B(H)$, la siguiente desigualdad

$$\|(S \circ T)x\| \leq \|S\|\|T(x)\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|,$$

de lo cual, $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$.

Definición 1.3. Una **- álgebra* es un álgebra A con involución *, llamada el adjunto, tal que para todos x, $y \in A$ y $c \in \mathbb{C}$,

1. $(x + y)^* = x^* + y^*$,
2. $(cx)^* = \overline{c}x^*$,

3. $(x^*)^* = x$,
4. $(xy)^* = y^*x^*$.

Definición 1.4. Una **- álgebra de Banach* es un álgebra de Banach dotada de una involución, que la hace una *- álgebra.

Ejemplos 1.2. $B(H)$ es una *-álgebra de Banach con involución * dada por el adjunto del operador.

Definición 1.5. Sean A, B *-álgebras de Banach. Un *- homomorfismo es una función $T : A \to B$ que satisface

1. $T(a^*) = (T(a))^*$,
2. $T(ab) = T(a)T(b)$,
3. $T(a + b) = T(a) + T(b)$.

Sea A una *-álgebra de Banach. Si la norma $\|\cdot\|$ en A satisface la *C*-identidad*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2,$$

para todo $a \in A$. Entonces * es una isometría, Observe que

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|,$$

y así, $\|a\| \leq \|a^*\|$. Análogamente,

$$\|a^*\|^2 = \|(a^*)^*a^*\| = \|aa^*\| \leq \|a\|\|a^*\|,$$

de donde $\|a^*\| \leq \|a\|$. Se tiene entonces que $\|a^*\| = \|a\|$, y por tanto, * es una isometría.

Definición 1.6. Una *C*- álgebra de Banach* es una *- álgebra de Banach, que satisface la C*- identidad.

Ejemplos 1.3.

(1) $B(H)$ es una C*- álgebra de Banach.

(2) Sea $C_0(X)$ el espacio de funciones continuas definidas en un espacio topológico Haussdorf localmente compacto en $\mathbb{C}$, tales que se anulan en infinito. Entonces $C_0(X)$ es una C*- álgebra con involución dada por la conjugación compleja y norma $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Esto viene de

$$\|f^*f\| = \sup_{x\in X} |\overline{f(x)}f(x)| = \sup_{x\in X} |f(x)|^2 = \|f\|^2.$$

Note que cualquier elemento a en una C*- algebra es la suma de operadores autoadjuntos, es decir, que satisfacen que $b^* = b$. Defina

$$\mathrm{Re}(a) = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad \mathrm{Im}(a) = \frac{1}{2i}(a - a^*).$$

Es claro que $a = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(a)$. Ahora, $\mathrm{Re}(a)$ y $\mathrm{Im}(a)$ son autoadjuntos, pues se satisface que

$$(\mathrm{Re}(a))^* = \left(\frac{1}{2}(a + a^*)\right)^* = \frac{1}{2}(a^* + a) = \mathrm{Re}(a),$$
$$(\mathrm{Im}(a))^* = \left(\frac{1}{2i}(a - a^*)\right)^* = -\frac{1}{2i}(a^* - a) = \mathrm{Im}(a).$$

Una C*- álgebra A con identidad multiplicativa es llamada *unital*. Si $1 \in A$ (a veces escrita como 1_A) es la unidad, entonces $1^* = 1^*1 = 11^* = 1$, $\|1\| = 1$.

Llamamos a un elemento a en una C*- álgebra

- ✓ *normal* si $a^*a = aa^*$,
- ✓ *autoadjunto* si $a = a^*$,
- ✓ *una proyección* si $a = a^* = a^2$,
- ✓ *unitario* si $a^*a = aa^* = 1$,
- ✓ *isometría parcial* si $a = aa^*a$.

Definición 1.7. Una función $\phi : A \to B$ entre C*- álgebras es *- preserving si $\phi(a)^* = \phi(a^*)$, para todo $a \in A$.

Proposición 1.1. Una función lineal entre C*- álgebras es *- preserving si y solo si envía elementos autoadjuntos en elementos autoadjuntos.

Proof. Sea $\phi : A \to B$ una función lineal entre C*- álgebras tal que $\phi(a)^* = \phi(a^*)$, para todo $a \in A$. Tome $b \in A$ con $b = b^*$. Luego, $\phi(b) = \phi(b^*) = \phi(b)^*$.

Considere $\phi : A \to B$ una función lineal entre C*- álgebras tal que envía elementos autoadjuntos en elementos autoadjuntos. Esto es, si $b \in A$ es tal que $b = b^*$, entonces $\phi(b) = \phi(b)^*$. Se quiere mostrar que si $a \in A$, entonces $\phi(a)^* = \phi(a^*)$. Así que sea $a \in A$, $a = \mathrm{Re}(a) + i\mathrm{Im}(a)$,

$$\begin{aligned}
\phi(a)^* =& (\phi(\mathrm{Re}(a) + i\mathrm{Im}(a)))^* \\
=& (\phi(\mathrm{Re}(a)) + i\phi(\mathrm{Im}(a)))^* \\
(\cdot) =& \phi(\mathrm{Re}(a))^* - i\phi(\mathrm{Im}(a))^* \\
=& \phi(\mathrm{Re}(a)) - i\phi(\mathrm{Im}(a)) \\
=& \phi(\mathrm{Re}(a) - i\mathrm{Im}(a)) \\
=& \phi(a^*),
\end{aligned}$$

donde $(\cdot)$ se tiene porque $\mathrm{Re}(a)$, $\mathrm{Im}(a)$ son elementos autoadjuntos en A. $\square$

Un elemento a en un álgebra unital es *invertible* si existe un elemento b en el álgebra tal que $ab = ba = 1$. Escribimos $GL(A)$ al conjunto de los elementos invertibles de A.

En matrices, $T \in M_n(\mathbb{C})$ es invertible si y solo si $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. En dimensión infinita en general, esto no es cierto. Como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplos 1.4. Sea $S : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ tal que $S(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. Primero observe que $S \in B(l^2(\mathbb{N}))$, puesto que S es lineal y

$$\|Sx\| = \|(0, x_1, x_2, \cdots)\| = \|(x_1, x_2, \cdots)\| = \|x\|.$$

Además, si $x = (x_1, x_2, \cdots)$, $y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2(\mathbb{N})$ son tales que $S(x_1, x_2, \cdots) = S(y_1, y_2, \cdots)$, entonces se sigue que $x_n = y_n$ para todo n, y por tanto, $x = y$. Lo que muestra que S es inyectivo.

Pero S no es invertible, puesto que $\mathrm{Im}(T)$ no es denso en $l^2(\mathbb{N})$. En efecto, si $(x_1, x_2, \cdots) = x \in l^2(\mathbb{N})$ es tal que $x_1 \neq 0$, no existe una sucesión $\{y_n\} \subseteq \mathrm{Im}S$ tal que $y_n \to x$.
Sea $\{y_n\} \subseteq \mathrm{Im}S$ convergente a x. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que para $n > N$,

$$\|y_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i - x_i|^2 < \varepsilon.$$

Por tanto, $|y_{n_1} - x_1|^2 = |x_1|^2 < \varepsilon$, para n lo suficientemente grande, de lo cual $x_1 = 0$.

Ejemplos 1.5. Los operadores unitarios son operadores invertibles.

Con la noción de invertibilidad, se puede definir el *espectro* de un elemento a en una C*-álgebra unital A.

Definición 1.8. Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra unital y tome $a \in \mathcal{A}$. Se define el espectro de a como

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin GL(A)\}.$$

Observe que si a es invertible, $0 \notin \sigma(a)$.

La siguiente proposición proporciona información importante sobre el espectro de un operador.

Proposición 1.2. Para cualquier elemento a en un álgebra unital de Banach, $\sigma(a)$ es un subconjunto no vacío compacto de $\mathbb{C}$. Más aún, el espectro de a está contenido en la bola cerrada $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$. En particular, esto significa que $r(a) \leq \|a\|$, donde $r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$ es el radio espectral de a.

Observación 1.1. Sea λ un eigenvalor de a. Así existe $x \in \mathcal{A}$ no nulo tal que $ax = \lambda x$, de donde $x \in \mathrm{Ker}(a - \lambda 1)$. Se tiene entonces que $a - \lambda 1$ no es invertible. Se concluye que si λ es un eigenvalor de a, entonces $\lambda \in \sigma(a)$.

Ahora bien, a menos que $A = M_n(\mathbb{C})$, los elementos de $\sigma(a)$ no son todos eigenvalores. Para ver esto, considere el operador $S \in B(l^2(\mathbb{N}))$ definido en el ejemplo 1.4. Observe que $B(l^2(\mathbb{N}))$ es un álgebra unitaria de Banach, así por la proposición 1.2, $\sigma(S)$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$. Sin embargo, S no tiene eigenvalores. En efecto, suponga que λ es un autovalor de S con eigenvector $x = (x_1, x_2, \cdots)$ no nulo. Entonces $Sx = \lambda x$, de donde $0 = \lambda x_1$, $x_1 = \lambda x_2$, $\cdots$. De aquí, si $\lambda = 0$, $x = 0$, lo cual es una contradicción; o si $\lambda \neq 0$, $x = 0$.

El siguiente proposición muestra una propiedad interesante sobre los elementos normales en una C*-álgebra unitaria.

Proposición 1.3. Sea a un elemento normal en una C*-álgebra unitaria $\mathcal{A}$ y considere el álgebra $C(\sigma(a))$ de funciones continuas de valor complejo en $\sigma(a)$. Entonces existe una función $\Phi : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ que satisface las siguientes propiedades:

(i) Φ es un *-homomorfismo de álgebras unitario,

(ii) $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$, para todo $f \in C(\sigma(a))$, donde $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \sigma(a)\}$, para $f \in C(\sigma(a))$,

(iii) Denote por $id : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ la función identidad $id(z) = z$, se tiene entonces que $\Phi(id) = a$.

Observación 1.2.

- ✓ El nombre comúnmente usado para Φ es *cálculo funcional* para un elemento a. Se acostumbra además a usar la notación $f(a)$ en lugar de $\Phi(f)$, donde f es una función continua arbitraria en $\sigma(a)$.

- ✓ Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra unitaria, $a \in \mathcal{A}$ un elemento normal y $\Phi : C(\mathrm{Sp}(a)) \to \mathcal{A}$ que satisface las condiciones (i), (ii), (iii) de la proposición 1.3. Tome en particular un polinomio $p : \mathrm{Sp}(a) \to \mathbb{C}$ en z y $\overline{z}$, es decir, p es de la forma

$$p(z) = \sum_{j,k=0}^{n} \alpha_{j,k} z^j \overline{z}^k, \ \ z \in \mathrm{Sp}(a).$$

Entonces por (i) y (iii) se sigue que

$$\begin{aligned}
\Phi(p)(z) =& \Phi\left(\sum_{j,k=0}^{n} \alpha_{j,k} z^j \overline{z}^k\right) \\
=& \sum_{j,k=0}^{n} \alpha_{j,k} \Phi(z^j \overline{z}^k) \\
=& \sum_{j,k=0}^{n} \alpha_{j,k} \Phi(z)^j \Phi(\overline{z})^k \\
=& \sum_{j,k=0}^{n} \alpha_{j,k} a^j (a^*)^k.
\end{aligned}$$

Lo que muestra que los valores de Φ en polinomios de z y $\overline{z}$ están únicamente determinados.

Definición 1.9. La C*- álgebra más pequeña que continene a $\mathcal{A}$ es llamada su *unitización*, $\tilde{\mathcal{A}}$. Para una C*- álgebra no unitaria $\mathcal{A}$, se define $\tilde{\mathcal{A}}$ como sigue

$$\tilde{\mathcal{A}} := A \oplus \mathbb{C},$$

con las operaciones algebraicas dadas por

$$\begin{aligned} (a,\alpha)(b,\beta) =& (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta), \\ (a,\alpha)^* =& (a^*, \bar{\alpha}), \\ \|(a,\alpha)\| =& \sup_{b\in\mathcal{A}, b\leq 1} \|ab + \alpha b\|. \end{aligned}$$

En este caso, $1_{\tilde{\mathcal{A}}} = (0,1)$ es la unidad en $\tilde{\mathcal{A}}$, puesto que

$$\begin{aligned} (a,\alpha)(0,1) =& (a\cdot 0 + \alpha\cdot 0 + a\cdot 1, \alpha\cdot 1) = (a,\alpha), \\ (0,1)(a,\alpha) =& (0\cdot a + 1\cdot a + \alpha\cdot 0, 1\cdot\alpha) = (a,\alpha). \end{aligned}$$

La siguiente proposición muestra que $\tilde{\mathcal{A}}$ definida anteriormente es una C*- álgebra de Banach:

Proposición 1.4. Cualquier C*- álgebra no unitaria $\mathcal{A}$ está inmersa en una C*- álgebra unitaria $\tilde{\mathcal{A}}$ como un ideal de codimensión 1, es decir, no existe otro ideal propio de $\tilde{\mathcal{A}}$ que contiene a $\mathcal{A}$ y $\tilde{\mathcal{A}}/A = \mathbb{C}$.

Observación 1.3. Si $\mathcal{A}$ es unitaria, entonces se toma la convención $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$. Sin embargo, a veces se añade una unidad en una C*- álgebra unitaria, esto es lo que se conoce como *unitización forzada*. En este caso, sea $\mathcal{A}$ una C*- álgebra unitaria con unidad 1_A, y considere $\tilde{\mathcal{A}} = A \oplus \mathbb{C}$, con multiplicación, involución y norma dados por

$$\begin{aligned} (a,\alpha)(b,\beta) =& (ab, \alpha\beta), \\ (a,\alpha)^* =& (a^*, \bar{\alpha}), \\ \|(a,\alpha)\| =& \max\{\|a\|, \|\alpha\|\}. \end{aligned}$$

La unidad en $\tilde{\mathcal{A}}$ es $(1_A, 1)$. Y así, $\tilde{\mathcal{A}}$ es una C*- álgebra unitaria.

Proposición 1.5. Sean A, B C*- álgebras con B unitaria y A no unitaria y $\pi : A \to B$ un *- homomorfismo. Entonces existe una única extensión de π a un *- homomorfismo unitario $\tilde{\pi} : \tilde{A} \to B$ dada por $\tilde{\pi}(a + \lambda 1_{\tilde{A}}) = \pi(a) + \lambda 1_B$.

Proof. Se debe verificar que $\tilde{\pi}$ es un *- homomorfismo. Para esto, sean $a + \lambda 1_{\tilde{A}}$, $b + \beta 1_{\tilde{A}} \in \tilde{A}$. Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}((a + \lambda 1_{\tilde{A}}) + (b + \beta 1_{\tilde{A}}) =& \tilde{\pi}((a+b) + (\lambda+\beta)1_{\tilde{A}}) \\ =& \pi(a+b) + (\lambda+\beta)1_B \\ =& \pi(a) + \lambda 1_B + \pi(b) + \beta 1_B \\ =& \tilde{\pi}(a + \lambda 1_{\tilde{A}}) + \tilde{\pi}(b + \beta 1_{\tilde{A}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}((a+\lambda 1_{\tilde{A}})^*) =&\tilde{\pi}(a^*+\overline{\lambda}1_{\tilde{A}})\\ =&\pi(a^*)+\overline{\lambda}1_B\\ =&\pi(a)^*+\overline{\lambda}1_B\\ =&(\pi(a)+\lambda 1_B)^*\\ =&(\tilde{\pi}(a+\lambda 1_{\tilde{A}}))^*,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(a+\lambda 1_{\tilde{A}})\tilde{\pi}(b+\beta 1_{\tilde{A}}) =&(\pi(a)+\lambda 1_B)(\pi(b)+\beta 1_B)\\ =&\pi(a)\pi(b)+\beta\pi(a)1_B+\lambda\pi(b)1_B+\lambda\beta 1_B\\ =&\pi(ab)+\beta\pi(a)1_B+\lambda\pi(b)1_B+\lambda\beta 1_B\\ =&\pi(ab+\beta a+\lambda b)+\lambda\beta 1_B\\ =&\tilde{\pi}(ab+\beta a+\lambda b+\lambda\beta 1_{\tilde{A}})\\ =&\tilde{\pi}((a+\lambda 1_{\tilde{A}})(b+\beta 1_{\tilde{A}})).\end{aligned}$$

Sea $\phi : \tilde{A} \to B$ otra extensión de π a un *- homomorfismo unitario. Teniendo en cuenta que $1_{\tilde{A}} \to 1_B$, se llega a que para todo $a+\lambda 1_{\tilde{A}} \in \tilde{A}$,

$$\phi(a+\lambda 1_{\tilde{A}} = \phi(a)+\lambda\phi(1_{\tilde{A}}) = \pi(a)+\lambda 1_B = \tilde{\pi}(a+\lambda 1_{\tilde{A}}).$$

□

Definición 1.10. El *espectro* de un elemento a en una C*- álgebra es

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1_{\tilde{A}} - a \notin GL(\tilde{A})\},$$

donde $A = \tilde{A}$, si A es unitario.

Observación 1.4. Sea A una C*-subálgebra no unitaria de una C*- álgebra unitaria B. Entonces existe un homomorfismo bijectivo *- preserving entre $\tilde{A}$ y la C*- álgebra generada por A y 1_B, $C^*(A, 1_B)$ dado por $(a, \alpha) \to a + \alpha 1_B$. Esto significa que cuando una C*- álgebra no unitaria está contenida en una que si lo es, entonces la unitización de A, se halla solo añadiendo a A, la unidad dada en B.

Proposición 1.6. Para cualquier elemento a en un álgebra de Banach A, $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Lemma 1.1. *Si a es un elemento normal en una C*- álgebra A, $\|a\| = r(a)$.*

Proof. Sea $a \in A$ tal que $a = a^*$, por la C*- identidad $\|a^2\| = \|aa\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Luego,

$$\begin{aligned} r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} &= \lim_{n\to\infty} \|a^{2^{n-1}\cdot 2}\|^{\frac{1}{2^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(a^{2^{n-1}})^2\|^{\frac{1}{2^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|a^{2^{n-1}}\|^{\frac{2}{2^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|a^{2^{n-1}}\|^{\frac{1}{2^{n-1}}} \\ &= \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \|a^2\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|a\|^{\frac{2}{2}} \\ &= \|a\|. \end{aligned}$$

Ahora suponga que a es normal, esto es $a^*a = aa^*$. Note que $(a^*a)^* = a^*a$. Entonces

$$\begin{aligned} \|a\|^2 = \|a^*a\| &= r(a^*a) \quad \text{(caso anterior)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(a^*a)^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(a^n)^*a^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{2}{n}} \quad \text{(C*- identidad)} \\ &= r(a)^2. \end{aligned}$$

□

Definición 1.11. Decimos que dos C*-álgebras son las "mismas" si existe un **- isomorfismo* entre ellas, es decir, un homomorfismo biyectivo *- preserving.

Se finaliza este capítulo presentando dos de los teoremas más importantes en el estudio de C*-álgebras y el análisis funcional, los cuales son los teoremas de Gelfand-Naimark y Gelfand, demostrado por los matemáticos Israel Gelfand y Mark Naimark en 1943.

Teorema 1.2. *(Teorema de Gelfand- Naimark). Toda C*-álgebra es isométrica e isomorfa a una C*-subálgebra de $B(H)$, para algún espacio de Hilbert H.*

Teorema 1.3. *(Teorema de Gelfand). Cualquier C*-álgebra conmutativa A es *-isomorfa a la C*-álgebra $C_0(X)$, para algún espacio de Hausdorff localmente compacto X. Más aún, cuando A es unitario, X es compacto.*

2 Espacios de probabilidad no conmutativos

Definición 2.1.

(1) Un *espacio de probabilidad no conmutativo* es una dupla $(\mathcal{A}, \varphi)$, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra unital sobre $\mathbb{C}$ y φ es un funcional lineal unitario

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad \varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1.$$

Los elementos de $\mathcal{A}$ son llamados *variables aleatorias no conmutativas.*

Se dice que un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ es *tracial* si el funcional φ es una traza, es decir, tiene la propiedad que

$$\varphi(ab) = \varphi(ba), \ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

(2) Si $\mathcal{A}$ es una *- álgebra y $\varphi(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in \mathcal{A}$, se dice que φ es positivo y a $(\mathcal{A}, \varphi)$ se le llama un *- espacio de probabilidad.

A continuación se presentan algunas propiedades de los *-espacios de probabilidad.

Proposición 2.1. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un *- espacio de probabilidad. Entonces el funcional φ es autoadjunto, es decir, para todo $a \in \mathcal{A}$ se satisface que $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$.

Proof. Sea $z \in \mathcal{A}$ autoadjunto, entonces existen a, $b \in \mathcal{A}$ tales que $z = c^*c - b^*b$. Por la linealidad de φ,

$$\varphi(z) = \varphi(c^*c) - \varphi(b * b) \in \mathbb{R},$$

puesto que por la positividad de φ, $\varphi(c^*c)$, $\varphi(b * b) \geq 0$.

Ahora bien, sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces se había visto que $a = x + iy$, donde x, y son autoadjuntos. Así, por lo demostrado anteriormente $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in \mathbb{R}$ y

$$\overline{\varphi(a)} = \overline{\varphi(x) + i\varphi(y)} = \varphi(x) - i\varphi(y) = \varphi(x - iy) = \varphi(a^*).$$

□

Proposición 2.2. Considere $(\mathcal{A}, \varphi)$ un *- espacio de probabilidad. Entonces

$$|\varphi(b^*a)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(b^*b),$$

para todos a, $b \in \mathcal{A}$.

La anterior desigualdad es llamada la *desigualdad de Cauchy- Schwarz.*

Observación 2.1. Si un elemento $a \in \mathcal{A}$ es tal que $\varphi(a^*a) = 0$, entonces por la desigualdad de Cauchy- Schwarz, para todo $b \in \mathcal{A}$, $\varphi(ba) = 0$. Se dice que el funcional φ *fiel* cuando el único elemento $a \in \mathcal{A}$ que satisface que $\varphi(a^*a) = 0$ es $a = 0$.

Ejemplos 2.1.

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad en el sentido usual y tome $\mathcal{A} = L^{\infty}(\Omega)$. Si se define * como la conjugación compleja y el funcional $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ como

$$\varphi(a) = \int_{\Omega} a(w) dP(w),$$

entonces $\mathcal{A}$ es una *- álgebra con unidad $1_{\mathcal{A}}(w) = 1$ y

$$\varphi(1_{\mathcal{A}}) = \int_{\Omega} dP(w) = P(\Omega) = 1.$$

Además, es claro que φ es lineal y para toda $f \in L^{\infty}(\Omega)$ se tiene que

$$\varphi(f^* f) = \varphi(|f|^2) = \int_{\Omega} |f|^2(w) P(w) \geq 0.$$

Lo anterior muestra que $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un *- espacio de probabilidad.

2. Sea H un espacio de Hilbert y $B(H)$ el conjunto de operadores lineales acotados de H en H, con involución dada por el adjunto de un operador. Se probó antes que $B(H)$ es una *- álgebra. Considere $\mathcal{A}$ una *- subálgebra de $B(H)$ unitaria de $B(H)$ y $\xi_0 \in H$ unitario. Defina además $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ como

$$\varphi(a) := \langle a\xi_0, \xi_0 \rangle.$$

Observe que φ satisface las siguientes propiedades para a, $b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$

✓ φ es lineal. En efecto,

$$\varphi(a + \lambda b) = \langle (a + \lambda b)\xi_0, \xi_0 \rangle = \langle a\xi_0, \xi_0 \rangle + \overline{\lambda} \langle b\xi_0, \xi_0 \rangle = \varphi(a) + \overline{\lambda}\varphi(b).$$

✓ Si $1_{\mathcal{A}}$ denota la unidad de $\mathcal{A}$, entonces

$$\varphi(1_{\mathcal{A}}) = \langle 1_{\mathcal{A}}\xi_0, \xi_0 \rangle = \langle \xi_0, \xi_0 \rangle = 1.$$

✓ $\varphi(a^* a) = \langle a^* a\xi_0, \xi_0 \rangle = \langle a\xi_0, a\xi_0 \rangle \geq 0.$

Por tanto, $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un *- espacio de probabilidad. El funcional aquí definido es conocido como *vector de estados* en el álgebra de los operadores $\mathcal{A}$.

Definición 2.2. Un *morfismo* entre dos espacios de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$ y $(\mathcal{B}, \psi)$ es un *-homomorfismo unitario $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ con la propiedad que $\psi \circ \Phi = \varphi$. En caso que $(\mathcal{B}, \psi)$ sea un *- espacio de probabilidad como el mostrado en el segundo item del ejemplo anterior, Φ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es llamado una *representación* de $(\mathcal{A}, \varphi)$.

La idea ahora es definir la *- distribución de una variable aleatoria a en el espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$. Para introducir este concepto, se empieza tomando el caso en que a sea un elemento normal.

Suponga entonces que $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un *- espacio de probabilidad y $a \in \mathcal{A}$ es normal. El álgebra unitaria generada por a es

$$\mathcal{A} := \operatorname{span}\{a^k(a^*)^l : k, l \geq 0\}.$$

Se puede pensar que la función de la *- distribución de a es llevar un conteo o registro de los valores $\varphi(a^k(a^*)^l)$, donde k, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De manera más precisa,

Definición 2.3. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un *- espacio de probabilidad y a un elemento normal en $\mathcal{A}$. Si existe una medida de probabilidad μ en $\mathbb{C}$ tal que

$$\int z^k \overline{z}^l d\mu(z) = \varphi(a^k(a^*)^l), \text{ para todos } k, l \in \mathbb{N},$$

entonces μ está únicamente determinada y se le llama *medida de probabilidad* μ de la *- distribución de a.

Observe que la definición 2.3 no dice que todo elemento normal en un *-espacio de probabilidad tiene una *- distribución.

Ejemplos 2.2. Se va a considerar el caso en que la variable aleatoria sea un elemento autoadjunto del *- espacio de probabilidad. Observe que, en particular, es un elemento normal en el álgebra.

Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un *-espacio de probabilidad, y a un elemento autoadjunto en $\mathcal{A}$. Suponga que a tiene *-distribución μ. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |z - \overline{z}|^2 d\mu(z) = &\int_{\mathbb{C}} (z - \overline{z})(\overline{z} - z) d\mu(z)\\ =&2\int_{\mathbb{C}} z\overline{z} d\mu(z) - \int_{\mathbb{C}} z^2 d\mu(z) - \int_{\mathbb{C}} \overline{z}^2 d\mu(z)\\ =&2\varphi(a^1(a^*)^1) - \varphi(a^2) - \varphi(a^{*2})\\ =&2\varphi(a^2) - \varphi(a^2) - \varphi(a^2)\\ =&0.\end{aligned}$$

Como $z \to |z - \overline{z}|^2$ es una función continua no negativa, entonces $z - \overline{z}$ se debe de hacer cero en el soporte de la medida. Esto es,

$$\sup(\mu) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : z = \overline{z}\} = \mathbb{R}.$$

Esto quiere decir que μ es un medida en $\mathbb{R}$ y así

$$\int z^k \overline{z}^l d\mu(z) = \varphi(a^k(a^*)^l)$$

se escribe

$$\int t^p d\mu(t) = \varphi(a^p), \ p \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Recíprocamente, suponga que se tiene una medida de soporte compacto μ en $\mathbb{R}$ tal que se satisface la relación 1. Entonces μ es la *-distribución de a, en el sentido que

$$\begin{aligned}\int z^k \overline{z}^l d\mu(z) =& \int t^{k+l} d\mu(t) \text{ y} \\ \varphi(a^k(a^*)^l) =& \varphi(a^{k+l}).\end{aligned}$$

Y por tanto, como $\int t^{k+l} d\mu(t) = \varphi(a^{k+l})$, entonces

$$\int z^k \overline{z}^l d\mu(z) = \varphi(a^k(a^*)^l), \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Con el ejemplo anterior, en vez de hablar de *-distribución de un elemento autoadjunto $a \in \mathcal{A}$, es más apropiado hablar de la *distribución* de a.

Ahora sí, se va a ver las *- distribuciones en el caso en que el elemento a no sea necesariamente normal. Para esto, tome $(\mathcal{A}, \varphi)$ un *-espacio de probabilidad y $a \in \mathcal{A}$. El *-álgebra unitaria de $\mathcal{A}$ generada por a es

$$\mathcal{A}_0 := \text{span}\{a^{\varepsilon(1)} \cdots a^{\varepsilon(k)} : k \geq 0, \varepsilon(1), \cdots, \varepsilon(k) \in \{1, *\}\},$$

es decir, es la combinación de todas las palabras que se pueden formar usando las letras a y a^*.

Definición 2.4. Sea a una variable aleatoria en un *-espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$. Una expresión de la forma

$$\varphi(a^{\varepsilon(1)} \cdots a^{\varepsilon(k)}),$$

con $k \geq 0$ y $\varepsilon(1), \cdots, \varepsilon(k) \in \{1, *\}$, es llamado un *-momento de a.

El trabajo en este caso de la *-distribución de a es llevar un registro de los *-momentos.

Debido a que un elemento general en una *-álgebra no tiene una estructura necesariamente analítica, (como en el caso de los elementos normales en donde se satisface que $a^*a = aa^*$) surge la necesidad de definir la *-distribución de una forma algebraica. Con el objetivo de introducir el concepto se va a considerar el álgebra unitaria generada por variables X y X^* no conmutativas, $\mathbb{C}\langle X, X^* \rangle$. Esta álgebra tiene como base el conjunto de todos los monomios de la forma $X^{\varepsilon(1)} \cdots X^{\varepsilon(k)}$, donde $k \geq 0$ y $\varepsilon(1), \cdots, \varepsilon(k) \in \{1, *\}$. La multiplicación aquí es definida por yuxtaposición.

Definición 2.5. Sea a una variable aleatoria en un *-espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$. La *-distribución de a es un funcional lineal

$$\mu : \mathbb{C}\langle X, X^* \rangle \to \mathbb{C}$$

determinado por el hecho que

$$\mu(X^{\varepsilon(1)} \cdots X^{\varepsilon(k)}) = \varphi(a^{\varepsilon(1)} \cdots a^{\varepsilon(k)}),$$

donde $k \geq 0$ y $\varepsilon(1), \cdots, \varepsilon(k) \in \{1, *\})$.

Cuando un elemento a es normal, observe que la *-distribución de a está definida dos veces. Para distinguirlas, la definición dada en 2.3 es llamada *-distribución en el sentido analítico, y la tratada en 2.5 *- distribución en el sentido algebraico.

Definición 2.6. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un *-espacio de probabilidad, y a un elemento autoadjunto de $\mathcal{A}$. En este caso, los *-momentos son los números $\varphi(a^k)$, $k \geq 0$, y se llaman *momentos* de a.

El primer momento $\varphi(a)$ es también llamado la *media* de a, mientras que la cantidad $\text{var}(a) := \varphi(a^2) - \varphi(a)^2$ es la *varianza* de a.

2.1 C*- espacios de probabilidad

Definición 2.7. Un *C*-espacio de probabilidad* es un *-espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$ donde $\mathcal{A}$ es una C*-álgebra unitaria.

Se puede verificar que φ es continuo. Es decir, para todo $a \in \mathcal{A}$, $|\varphi(a)| \leq \|a\|$, ver página 40 de [3].

Ejemplos 2.3. Sea Ω un espacio topológico de Haussdorf compacto, y μ una medida de probabilidad en la $\sigma-$álgebra de Borel de Ω. Considere la C*-álgebra $\mathcal{A} = C_0(\Omega)$ (ver 1.3 (2)), con la norma del supremo e involución dada por la conjugación compleja. Observe que $1_{\mathcal{A}} \equiv 1$ es la unidad en $\mathcal{A}$. Si se define $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ por

$$\varphi(f) = \int_{\Omega} f d\mu, \;\; f \in \mathcal{A},$$

entonces $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un C*-espacio de probabilidad y todos los elementos de $\mathcal{A}$ son normales. En efecto, el funcional φ satisface que

$$\varphi(1_{\mathcal{A}}) = \int_{\Omega} d\mu = \mu(\Omega) = 1,$$

y para toda $f \in \mathcal{A}$,

$$\varphi(f\overline{f}) = \int_{\Omega} |f|^2 d\mu \geq 0.$$

Proposición 2.3. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un C*- espacio de probabilidad, y a un elemento normal de $\mathcal{A}$. Entonces a tiene una *-distribución μ en el sentido analítico. Más aún, para $f \in C(\sigma(a))$ se tiene que

$$\int f d\mu = \varphi(f(a)),$$

donde $f(a)$ es obtenido del cálculo funcional definido en 1.3, y μ es vista como una medida de probabilidad en $\sigma(a)$.

Proof. Sea $\Phi : C(\sigma(a)) \to \mathbb{C}$ el cálculo funcional para a (ver 1.3). Entonces $\varphi \circ \Phi : C(\sigma(a)) \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal positivo, y por el teorema de Riesz, existe una medida de probabilidad μ en la $\sigma-$álgebra de Borel de $\sigma(a)$ tal que

$$(\varphi \circ \Phi)(f) = \int f d\mu, \ \ f \in C(\sigma(a)).$$

Si en particular, se toma $f(z) = z^m \overline{z}^n$, para algún m, $n \geq 0$, entonces por la observación 1.2 $\Phi(f) = a^m (a^*)^n$, y así,

$$\varphi(a^m (a^*)^n) = \int_{\sigma(a)} z^m \overline{z}^n d\mu(z), \ \ m, n \geq 0.$$

Por tanto, a tiene una *- distribución en el sentido analítico y por la convención que $\Phi(f) = f(a)$, $f \in C(\sigma(a))$, se tiene que

$$\varphi(f(a)) = \int f d\mu.$$

□

Corolario 2.3.1. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un *-espacio de probabilidad. Si $(\mathcal{A}, \varphi)$ admite una representación en un espacio de Hilbert, entonces todo elemento normal en $\mathcal{A}$ tiene una *-distribución en el sentido analítico.

Proof. Como el *-espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$ admite una representación en un espacio de Hilbert, entonces existe un C*-espacio de probabilidad $(\mathcal{B}, \psi)$ y un *- homomorfismo unitario $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ con la propiedad que $\psi \circ \Phi = \varphi$.

Sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento normal, entonces $b = \Phi(a)$, es tal que

$$\begin{aligned}
\Phi(a)^* \Phi(a) = \Phi(a^*) \Phi(a) &= \Phi(a^* a) \\
&= \Phi(a a^*) \\
&= \Phi(a) \Phi(a^*) \\
&= \Phi(a) \Phi(a)^*,
\end{aligned}$$

esto es, $\Phi(a)$ es un elemento normal en $\mathcal{B}$. Por tanto, por la proposición 2.3, b tiene una *-distribución μ en el sentido analítico, de lo cual,

$$\int z^m \overline{z}^n d\mu = \psi(b^m(b^*)^n).$$

Pero, al ser Φ un *-homomorfismo se tiene que

$$\psi(b^m(b^*)^n) = \psi(\Phi(a^m(a^*)^n) = \varphi(a^m(a^*)^n),$$

lo que muestra que μ es una *-distribución de a. $\square$

2.2 Independencia

En esta sección se van a introducir las cuatro nociones de independencia para espacios de probabilidad. Se empieza con el caso clásico, es decir, cuando el espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$ es conmutativo. Aquí, si a, $b \in \mathcal{A}$ conmutan, todo momento mixto en a y b puede ser reducido en la forma $\varphi(a^n b^m)$. Se va a ver que si a y b son independientes, $\varphi(a^n b^m) = \varphi(a^n)\varphi(b^m)$ y así, φ contiene toda la información conjunta de a y b. Sin embargo, si el espacio es no conmutativo, no todos los momentos en a y b pueden ser vistos de la forma $\varphi(a^n b^m)$ y este valor, solo tiene una pequeña parte de la información de la distribución conjunta de a y b. Surge entonces la idea de definir independencia para este tipo de espacios.

2.2.1 Independencia tensorial

Definición 2.8. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad no conmutativo e I un conjunto de índices fijo.

✓ Las subálgebras unitarias $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ son llamadas *independientes tensorialmente*, si las subálgebras $\mathcal{A}_i$ conmutan (es decir, $ab = ba$ para todos $a \in \mathcal{A}_i$, $b \in \mathcal{A}_j$, i, $j \in I$ con $i \neq j$) y si el funcional φ satisface que

$$\varphi\left(\prod_{j \in J} a_j\right) = \prod_{j \in J} \varphi(a_j),$$

para todo subconjnto finito $J \subseteq I$ y todo $a_j \in \mathcal{A}_j$, $i \in J$.

✓ La *independencia tensorial de variables aleatorias* es definida como la independencia tensorial de las álgebras unitarias generadas por ellas. Es decir, a y b son independientes tensorialmente si a y b conmutan y sus momentos factorizan, esto es,

$$ab = ba \text{ y } \varphi(a^n b^m) = \varphi(a^n)\varphi(b^m) \ \forall n, m \geq 0.$$

2.2.2 Independencia libre

Definición 2.9. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad no conmutativo e I un conjunto fijo de índices.

✓ Tome para cada $i \in I$, una subálgebra unitaria $\mathcal{A}_\rangle \subseteq \mathcal{A}$. Las subálgebras $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ se dicen *independientes libremente*, si

$$\varphi(a_1 \cdots a_k) = 0,$$

y siempre que se cumpla que

- $k \in \mathbb{Z}^+$,
- $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$, para todo $j = 1, \cdots, k$, con $i(j) \in I$,
- $\varphi(a_j) = 0$ para todo $j = 1, \cdots, k$,
- y los elementos vecinos son de diferentes subálgebras, es decir $i(1) \neq i(2)$, $i(2) \neq i(3)$, $\cdots$, $i(k-1) \neq i(k)$.

✓ Sean $B_i \subseteq \mathcal{A}$, $i \in I$ subconjuntos de $\mathcal{A}$. Se dice que $(B_i)_{i \in I}$ son independientes libremente si $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ son independientes libremente, siendo $\mathcal{A}_i := \text{álg}(1, a_i)$ el álgebra unitaria generada por B_i.

✓ Si las álgebras unitarias generadas por las variables aleatorias $a_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, $\mathcal{A}_i := \text{álg}(1, a_i)$, son independientes libremente, entonces $(a_i)_{i \in I}$ son llamadas *variables aleatorias libremente independientes.*

✓ Si $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un *-espacio de probabilidad, las *-álgebras unitarias $\mathcal{A}_i := \text{álg}(1, a_i, a_i^*)$ generadas por las variables aleatoria a_i, $i \in I$ son libremente independientes, entonces se dice que $(a_i)_{i \in I}$ son **-libremente independientes.*

A la *-independencia libre también se le conoce como **-libre.*

2.2.3 Independencia booleana

Definición 2.10. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad e I un conjunto de índices fijo. La familia $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ de *-subálgebras de $\mathcal{A}$, se dice independiente en el sentido booleano si se cumple que

$$\varphi(a_1 a_2 \cdots a_k) = \varphi(a_1)\varphi(a_2 \cdots a_k),$$

donde $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$, para todo $j = 1, \cdots, k$, con $i(j) \in I$, y los elementos vecinos son de diferentes subálgebras, es decir $i(1) \neq i(2)$, $i(2) \neq i(3)$, $\cdots$, $i(k-1) \neq i(k)$.

2.2.4 Independencia monótona

Definición 2.11. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in I\}$ una familia de *-subálgebras de $\mathcal{A}$. Considere un momento $\varphi(a_1 \cdots a_k)$ tal que $a_i \in \mathcal{A}_{\lambda_i}$ y los elementos vecinos son de distintas subálgebras. Suponga además que el índice I tiene un orden lineal $<$. Entonces se dice que $\{A_\lambda\}$ es monótonamente independiente si

$$\varphi(a_1 \cdots a_i \cdots a_k) = \varphi(a_i)\varphi(a_1 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_k),$$

cuando i cumple que $\lambda_{i-1} < \lambda_i > \lambda_{i+1}$. Si $i = 1$ o n la desigualdad anterior no es considerada.

2.3 Teorema del límite central

La idea ahora es conocer la distribución del promedio de variables aleatorias idénticamente distribuidas, cuando el número de variables aleatorias tiende a infinito. Para esto, se mirará el Teorema del Límite Central para los diferentes tipos de independencia.

Teorema 2.1. *(Teorema del Límite Central) Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad y $(a_n)_n \in \mathcal{A}$ una sucesión de variables aleatorias autoadjuntas idénticamente distribuidas. Además, suponga que las variables aleatorias son centradas, es decir, $\varphi(a_n) = 0$, para todo n y de varianza común $\sigma^2 := \varphi(a_n^2)$. Entonces*

- ✓ *(Sentido clásico) Si las variables aleatorias a_1, a_2, $\cdots$ son independientes en el sentido clásico entonces*

  $$\frac{a_1 + \cdots a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} z$$

  donde z es una variable aleatoria gaussiana de varianza σ^2.

- ✓ *(Libre) Si las variables aleatorias a_1, a_2, $\cdots$ son independientes en el sentido libre entonces*

  $$\frac{a_1 + \cdots a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} z$$

  donde z es una variable aleatoria semicircular de varianza σ^2.

- ✓ *(Booleano) Si las variables aleatorias a_1, a_2, $\cdots$ son independientes en el sentido booleano, entonces*

  $$\frac{a_1 + \cdots a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} z$$

  donde z es una variable aleatoria Bernoulli de varianza σ^2.

- ✓ *(Monótono) Si las variables aleatorias a_1, a_2, $\cdots$ son independientes en el sentido monótono, entonces*

  $$\frac{a_1 + \cdots a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} z$$

  donde z es una variable aleatoria con distribución ley del arcoseno de varianza σ^2.

Bibliografía

[1] Courtney , K, & Gillaspy, E. (2023). Notes on C*- algebras.

[2] Kadison, R, & Ringrose, J. (1997). Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol 1. American Mathematical Society.

[3] Nica, A., & Speicher, R. (2006). Lectures on the Combinatorics of Free Probability. Cambridge University Press, & London Mathematical Society.

[4] Perales, D. (2016). Cumulantes en probabilidad libre finita. Universidad Nacional Autónoma de México, tesis.